

文章编号 1005-0388(2011)06-1088-07

交替隐式时域有限差分分析 有耗介质电磁波传播

张玉廷¹ 蔡 智² 刘 胜³

(1. 中国空间技术研究院总体部, 北京 100094; 2. 中国电子工业科学技术交流中心, 北京 100038;
3. 哈尔滨工程大学自动化学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘 要 针对电磁波在有耗介质中的传播特点, 提出了改进的交替方向隐式时域有限差分(ADI-FDTD)算法来研究电磁波在有耗介质中的传播特性。改进后的算法可改善传统 ADI-FDTD 为提高计算效率导致的计算精度下降的缺点。证明了算法的无条件稳定性, 并分析了算法的数值色散。通过算例对比验证了算法的有效性和对计算精度的改善。将算法应用到金属球体在空气中、地面上方和海平面上方的电磁散射分析中, 仿真结果表明: 介质损耗在一定程度增大电磁散射的同时, 会加大电磁散射的震荡。

关键词 交替隐式时域有限差分法; 有耗介质; 无条件稳定性; 数值色散; 电磁波

中图分类号 TN011

文献标志码 A

1. 引 言

时域有限差分法(FDTD)因其算法简捷等优点, 已广泛应用于电磁波传播、电磁散射和电磁兼容等诸多电磁学领域^[1-2]。但传统的 FDTD 算法属于显式差分, 受柯朗-弗里德里希斯-列维(CFL)稳定性条件的限制, 时间和空间步长不能选取太大, 所以计算效率低下。为了消除 CFL 稳定性条件的限制, 交替方向隐式(ADI) FDTD 被提出并得到有效应用^[3-5]。

严格来说, 实际电磁波在传播过程中, 其传输媒介是有耗的。例如, 机载雷达发射电磁波在高空、地面上方和海平面上方的传播情况是不同的, 将各种环境近似为无耗媒介必然会造成分析研究中出现较大的误差。因此, 研究电磁波在有耗介质中的传播情况可有效改进与电磁波传播方面有关问题的分析水平。文献[6]-[8]研究了有耗介质中电磁波的传播情况, 但其采用的传统 FDTD 算法因存在上述的 CFL 限制条件而导致计算效率低下。文献[9]-[10]

分析了有耗介质中 ADI-FDTD 算法的稳定性和数值色散, 但由于 ADI-FDTD 提高计算效率是以降低计算精度为代价的^[11], 所以其所研究的传统 ADI-FDTD 算法在分析有耗介质电磁波传播情况时存在误差较大的缺点。

鉴于此, 提出了一种改进的 ADI-FDTD 算法来分析二维 TM 波在有耗介质中的传播情况, 该算法可提高计算精度, 并具有无条件稳定性。分析了算法的数值色散, 并通过算例对比验证了算法的有效性。采用本文算法分析了空气中、地面上方和海平面上方的电磁散射特性, 说明本文方法可有效分析电磁波在有耗介质中的传播情况。

2. 有耗介质 ADI-FDTD 改进及分析

2.1 有耗介质 ADI-FDTD 及误差分析

对有耗介质, 介电常数为^[8]

$$\epsilon(\omega) = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \quad (1)$$

TM 波在有耗介质中的传播可表示为:

收稿日期: 2011-01-17

基金项目: 国家自然科学基金(60704004, 51079033); 中央高校基本科研业务费专项基金(HEUCFR1009, HEUCF110403)

联系人: 张玉廷 E-mail: zhangyutinghl@163.com

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial x} \\ \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial y} - \sigma \mathbf{E}_z \end{cases} \quad (2)$$

式(2)的 ADI-FDTD 方程在文献[12]中已有详细描述,限于篇幅原因,这里不再赘述。参考文献[13]的形式,式(1)和式(2)可写成如下状态方程

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{X} \quad (3)$$

式中:

$$\mathbf{X} = [E_z \quad D_z \quad H_x \quad H_y]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{j\omega}{\sigma} & 0 & \frac{j\omega}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -j\omega & 0 & -\frac{j\omega}{\sigma} \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -\sigma & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

将式(3)写成有限差分的形式为

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A} \right) \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B} \right) \mathbf{X}^{n+1} \\ &= \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A} \right) \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B} \right) \mathbf{X}^n + \\ & \quad \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{A}\mathbf{B} (\mathbf{X}^{n+1} - \mathbf{X}^n) \end{aligned} \quad (4)$$

式中, $\mathbf{I}$ 为单位矩阵。

对传统 ADI-FDTD, 式(4)的最后一项是忽略掉的, 所以传统 ADI-FDTD 的计算存在截断误差。截断误差与 Δt^2 有关, 因此, 时间步长的选择将影响传统 ADI-FDTD 的计算精度。

2.2 ADI-FDTD 改进算法

从上面的分析可以看出: 传统 ADI-FDTD 存在与 Δt^2 有关的截断误差, 这将影响计算精度。针对此, 下面将对传统 ADI-FDTD 方程进行改进, 以减小计算误差。

将式(4)写成 ADI-FDTD 两个时间步的形式为

$$\begin{cases} \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A} \right) \mathbf{X}^{n+\frac{1}{2}} = \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B} \right) \mathbf{X}^n + \\ \quad \frac{\Delta t^2}{8} \mathbf{A}\mathbf{B} (\mathbf{X}^{n+1} - \mathbf{X}^n) \\ \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B} \right) \mathbf{X}^{n+1} = \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A} \right) \mathbf{X}^{n+\frac{1}{2}} + \\ \quad \frac{\Delta t^2}{8} \mathbf{A}\mathbf{B} (\mathbf{X}^{n+1} - \mathbf{X}^n) \end{cases} \quad (5)$$

作近似

$$\mathbf{X}^n = \frac{\mathbf{X}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{X}^{n-\frac{1}{2}}}{2} \quad \mathbf{X}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{X}^{n+1} + \mathbf{X}^n}{2} \quad (6)$$

则式(5)可写成

$$\begin{cases} \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A} \right) \mathbf{X}^{n+\frac{1}{2}} = \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B} \right) \mathbf{X}^n + \\ \quad \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{A}\mathbf{B} (\mathbf{X}^n - \mathbf{X}^{n-\frac{1}{2}}) \\ \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B} \right) \mathbf{X}^{n+1} = \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A} \right) \mathbf{X}^{n+\frac{1}{2}} + \\ \quad \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{A}\mathbf{B} (\mathbf{X}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{X}^n) \end{cases} \quad (7)$$

将 $\mathbf{X}$ 、 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 代入到式(7)中的第一式可得到改进的 ADI-FDTD 第一时间步方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_z^{n+\frac{1}{2}} &= \left[1 - \frac{j\omega\Delta t}{2} \right] \mathbf{E}_z^n - \frac{j\omega\Delta t}{2\sigma} \mathbf{D}_z^{n+\frac{1}{2}} + \\ & \quad \frac{j\omega\Delta t}{2\sigma} \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial y} + \frac{\Delta t^2}{4} \left[j\omega \mathbf{E}_z^n + \frac{j\omega}{\sigma} \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial y} \right] + \\ & \quad \frac{j\omega\Delta t}{2\sigma} \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial y} - \frac{\Delta t^2}{4} \left[j\omega \mathbf{E}_z^{n-\frac{1}{2}} + \frac{j\omega}{\sigma} \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{D}_z^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{\Delta t}{2} \sigma \mathbf{E}_z^n - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial y} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial x} \quad (9)$$

$$\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{\Delta t}{2\mu} \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial y} + \mathbf{H}_x^n \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{H}_y^n - \frac{\Delta t^2}{4} \left[\frac{j\omega}{\mu} \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial x} + \frac{j\omega}{\sigma\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{H}_x}{\partial x \partial y} \right] + \\ & \quad \frac{\Delta t^2}{4} \left[\frac{j\omega}{\mu} \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial x} + \frac{j\omega}{\sigma\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{H}_x}{\partial x \partial y} \right] + \\ & \quad \frac{\Delta t}{2\mu} \frac{\partial \mathbf{E}_z^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} \end{aligned} \quad (11)$$

由式(8)、式(9)和式(11)可得

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}} + \frac{j\omega\Delta t^2}{4\sigma} \frac{\partial^2 \mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}}{\partial^2 x} \\ &= \mathbf{H}_y^n - \frac{\Delta t^2}{4} \left[\frac{j\omega}{\mu} \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial x} + \frac{j\omega}{\sigma\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{H}_x}{\partial x \partial y} \right] + \\ & \quad \frac{\Delta t^2}{4} \left[\frac{j\omega}{\mu} \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial x} + \frac{j\omega}{\sigma\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{H}_x}{\partial x \partial y} \right] + \\ & \quad \frac{\Delta t}{2\mu} \left[\frac{4 + 2j\omega\Delta t + j\omega\Delta t^2}{4} \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial x} - \frac{j\omega\Delta t^2}{4} \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial x} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{j\omega\Delta t^2}{4} \frac{\partial \mathbf{D}_x^n}{\partial x} + \frac{4j\omega\Delta t + j\omega\Delta t^2}{4\sigma} \frac{\partial^2 \mathbf{H}_x^n}{\partial x \partial y} + \\ & \left[\frac{j\omega\Delta t^2}{4\sigma} \frac{\partial^2 \mathbf{H}_x^n}{\partial x \partial y} - \frac{j\omega\Delta t^2}{4\sigma} \frac{\partial^2 \mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x \partial y} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)为形如 $\mathbf{AX}=\mathbf{b}$ 的线性方程,其中 $\mathbf{A}$ 为对角阵, $\mathbf{b}$ 为激励源向量。由式(12)可求得 $\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}$, 然后代入到式(8)~式(11)中可求得 $\mathbf{E}_z^{n+\frac{1}{2}}$ 、 $\mathbf{D}_z^{n+\frac{1}{2}}$ 和 $\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}$ 。

式(8)~式(11)即为改进的 ADI-FDTD 第一时间步方程,对第二时间步方程,可将 $\mathbf{X}$ 、 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 代入到式(7)中的第二式得到,限于篇幅原因,这里不给出具体表达式,其形式与式(8)~式(11)的形式相同。

2.3 算法稳定性分析

参考文献[14]的形式,上述改进的 ADI-FDTD 在有耗介质中的表达式可写成

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{4} \mathbf{P}_{\epsilon^{-1}} \mathbf{P}_{\sigma} & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{P}_{\epsilon^{-1}} \mathbf{C}_2 \\ \frac{\Delta t}{2} \mathbf{P}_{\mu^{-1}} \mathbf{C}_1^T & \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{4} \mathbf{P}_{\mu^{-1}} \mathbf{P}_{\sigma^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{n+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{h}^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \frac{\Delta t}{4} \mathbf{P}_{\epsilon^{-1}} \mathbf{P}_{\sigma} & \frac{\Delta t}{2} \mathbf{P}_{\epsilon^{-1}} \mathbf{C}_2 \\ -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{P}_{\mu^{-1}} \mathbf{C}_1^T & \mathbf{I} - \frac{\Delta t}{4} \mathbf{P}_{\mu^{-1}} \mathbf{P}_{\sigma^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^n \\ \mathbf{h}^n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

式中, $\mathbf{C}$ 为旋度算子。

若式(13)中的电磁场可表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}^n \\ \mathbf{h}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\epsilon^{-1}}^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_{\mu^{-1}}^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}^n \\ \hat{\mathbf{h}}^n \end{bmatrix} \quad (14)$$

则修正方程可写为

$$\mathbf{P}_{L1} \mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{P}_{R1} \mathbf{V}^n \quad (15)$$

$$\mathbf{P}_{L2} \mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{P}_{R2} \mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}} \quad (16)$$

式中: $\mathbf{V}^n = [\hat{\mathbf{e}}^n \ \hat{\mathbf{h}}^n]^T$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{L1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{4} \mathbf{P}_{\epsilon^{-1}} \mathbf{P}_{\sigma} & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{P}_{\epsilon^{-1}}^{1/2} \mathbf{C}_1 \mathbf{P}_{\mu^{-1}}^{1/2} \\ \frac{\Delta t}{2} \mathbf{P}_{\mu^{-1}}^{1/2} \mathbf{C}_1^T \mathbf{P}_{\epsilon^{-1}}^{1/2} & \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{4} \mathbf{P}_{\mu^{-1}} \mathbf{P}_{\sigma^*} \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}_{R1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \frac{\Delta t}{4} \mathbf{P}_{\epsilon^{-1}} \mathbf{P}_{\sigma} & \frac{\Delta t}{2} \mathbf{P}_{\epsilon^{-1}}^{1/2} \mathbf{C}_2 \mathbf{P}_{\mu^{-1}}^{1/2} \\ -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{P}_{\mu^{-1}}^{1/2} \mathbf{C}_2^T \mathbf{P}_{\epsilon^{-1}}^{1/2} & \mathbf{I} - \frac{\Delta t}{4} \mathbf{P}_{\mu^{-1}} \mathbf{P}_{\sigma^*} \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}_{L2} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{4} \mathbf{P}_{\epsilon^{-1}} \mathbf{P}_{\sigma} & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{P}_{\epsilon^{-1}}^{1/2} \mathbf{C}_2 \mathbf{P}_{\mu^{-1}}^{1/2} \\ \frac{\Delta t}{2} \mathbf{P}_{\mu^{-1}}^{1/2} \mathbf{C}_2^T \mathbf{P}_{\epsilon^{-1}}^{1/2} & \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{4} \mathbf{P}_{\mu^{-1}} \mathbf{P}_{\sigma^*} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_{R2} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \frac{\Delta t}{4} \mathbf{P}_{\epsilon^{-1}} \mathbf{P}_{\sigma} & \frac{\Delta t}{2} \mathbf{P}_{\epsilon^{-1}}^{1/2} \mathbf{C}_1 \mathbf{P}_{\mu^{-1}}^{1/2} \\ -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{P}_{\mu^{-1}}^{1/2} \mathbf{C}_1^T \mathbf{P}_{\epsilon^{-1}}^{1/2} & \mathbf{I} - \frac{\Delta t}{4} \mathbf{P}_{\mu^{-1}} \mathbf{P}_{\sigma^*} \end{bmatrix}$$

定义第 n 时间步的算法能量方程为

$$\mathbf{W}^n = (\mathbf{P}_{L2} \mathbf{V}^n)^T \mathbf{P}_{L2} \mathbf{V}^n \quad (17)$$

并定义式(15)的左侧为 $\mathbf{L}_1$, 右侧为 $\mathbf{R}_1$; 式(16)的左侧为 $\mathbf{L}_2$, 右侧为 $\mathbf{R}_2$, 则有^[15]

$$\mathbf{L}_1^T \mathbf{L}_1 = \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1 \quad \mathbf{L}_2^T \mathbf{L}_2 = \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_2 \quad (18)$$

于是有:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{n+1} - \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1 &= (\mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}})^T \\ & \begin{bmatrix} -\Delta t \mathbf{P}_{\epsilon^{-1}} \mathbf{P}_{\sigma} & 0 \\ 0 & -\Delta t \mathbf{P}_{\mu^{-1}} \mathbf{P}_{\sigma^*} \end{bmatrix} \mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}} \leq 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\mathbf{W}^n - \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1 = (\mathbf{V}^n)^T \begin{bmatrix} \Delta t \mathbf{P}_{\epsilon^{-1}} \mathbf{P}_{\sigma} & 0 \\ 0 & \Delta t \mathbf{P}_{\mu^{-1}} \mathbf{P}_{\sigma^*} \end{bmatrix} \mathbf{V}^n \geq 0 \quad (20)$$

从式(19)和式(20)可以看出,对任意 Δt , 都有:

$$\mathbf{W}^{n+1} \leq \mathbf{W}^n \quad (21)$$

这说明数值能量是有界的,也即本文给出的有耗介质 ADI-FDTD 算法是无条件稳定的。

2.4 数值色散分析

假设二维电磁波传播表示为

$$\phi = \phi_0 e^{j\omega n \Delta t - \gamma_x I \Delta x - \gamma_y J \Delta y} \quad (22)$$

式中: $\gamma_x = \gamma \cos \theta$; $\gamma_y = \gamma \sin \theta$; θ 为电磁波入射角, Δx 和 Δy 分别为 x 和 y 方向的步长。

对式(8)~式(11)的电磁波在有耗介质中传播的方程可写成

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{L1} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_y^{n+1/2} \\ \mathbf{H}_x^{n+1/2} \end{bmatrix} &= \mathbf{M}_{R1} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_y^n \\ \mathbf{H}_x^n \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}_{L2} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_y^{n+1} \\ \mathbf{H}_x^{n+1} \end{bmatrix} &= \mathbf{M}_{R2} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_y^{n+1/2} \\ \mathbf{H}_x^{n+1/2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{L1} &= \begin{bmatrix} \frac{1+b\sigma}{2} & 0 & 0 & -R_y \\ 0 & \frac{1+b\sigma}{2} & -R_x & 0 \\ 0 & -Q_x & 1 & 0 \\ -Q_y & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}_{R1} &= \begin{bmatrix} \frac{1-b\sigma}{2} & 0 & 0 & -R_x \\ 0 & \frac{1-b\sigma}{2} & -R_y & 0 \\ 0 & -Q_y & 1 & 0 \\ -Q_x & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_{I,2} = \begin{bmatrix} \frac{1+b\sigma}{2} & 0 & 0 & R_x \\ 0 & \frac{1+b\sigma}{2} & R_y & 0 \\ 0 & Q_y & 1 & 0 \\ Q_x & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R2} = \begin{bmatrix} \frac{1-b\sigma}{2} & 0 & 0 & R_y \\ 0 & \frac{1-b\sigma}{2} & R_x & 0 \\ 0 & Q_x & 1 & 0 \\ Q_y & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_y^n \\ \mathbf{H}_x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{y0} e^{j\omega n \Delta t} \\ \mathbf{H}_{x0} e^{j\omega n \Delta t} \end{bmatrix}$$

式中: b 、 d 、 R 和 Q 分别为文献[15]定义的参数

$$b = \Delta t / (2\varepsilon); d = \Delta t / (2\mu)$$

$$R_x = \frac{-2b \sinh(\gamma_z \Delta \xi / 2)}{\Delta \xi}; Q_x = \frac{-2d \sinh(\gamma_z \Delta \xi / 2)}{\Delta \xi}$$

式中: $\gamma = \alpha + j\beta$ 为电磁波在有耗介质中的传播系数; α 为损耗常数; β 为相位常数。

由式(22)和式(23)可得

$$(e^{j\omega \Delta t} \mathbf{I}_4 - \mathbf{M}) \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{y0} \\ \mathbf{H}_{x0} \end{bmatrix} = 0 \quad (24)$$

式中

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{I,2}^{-1} \mathbf{M}_{R2} \mathbf{M}_{I,1}^{-1} \mathbf{M}_{R1} \quad (25)$$

要使式(24)成立,则需满足

$$|e^{j\omega \Delta t} \mathbf{I}_4 - \mathbf{M}| = 0 \quad (26)$$

即二维 ADI-FDTD 算法在有耗介质中的应用,其色散关系满足式(26),故采用式(26)可分析二维 ADI-FDTD 算法在有耗介质中的数值色散。定义损耗误差和相位误差为

$$e_L = (\alpha - \alpha_0) / \alpha_0$$

$$e_P = (\beta - \beta_0) / \beta_0 \quad (27)$$

式中: α_0 和 β_0 为理论值。

图 1 和图 2 给出了电导率为 0.0001 S/m ~ 30 S/m 的损耗误差和相位误差曲线。

从图中可以看出:损耗误差和相位误差都很小。电导率在 0.0001 S/m ~ 1 S/m 衰减误差和相位误差变化很小。衰减误差在电导率为 1 S/m ~ 5 S/m, 随电导率增大而增大;在电导率为 5 S/m ~ 10.5 S/m, 随电导率增大而减小;在电导率为 10.5 S/m ~ 30 S/m, 绝对值随着电导率的增大而增大。相位误差绝对值在电导率为 1 S/m ~ 30 S/m, 随着电导率的增大而增大。

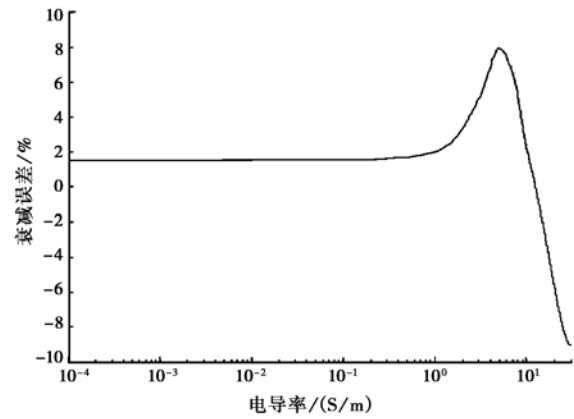


图 1 不同电导率损耗误差曲线

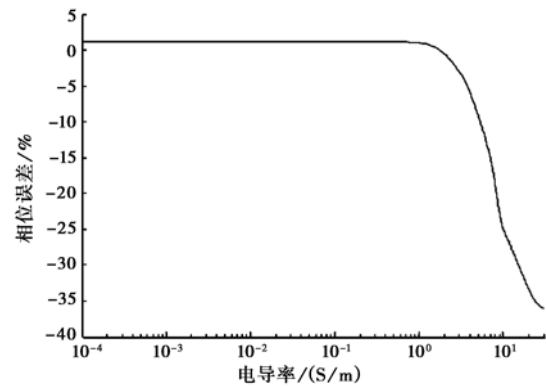


图 2 不同电导率相位误差曲线

3. 数值实验

3.1 改进 ADI-FDTD 分析有耗介质电磁波传播

为验证本文算法的有效性,以文献[6]中的算例为例,分析激励条件时的电磁波在有耗介质中的传播情况 $\mathbf{E}(0, t) = \mathbf{E}_0 u(t)$, 其中 $u(t)$ 为单位阶跃函数。图 3 给出了 $\Delta t = 0.0176$ ns 时的仿真对比结果。

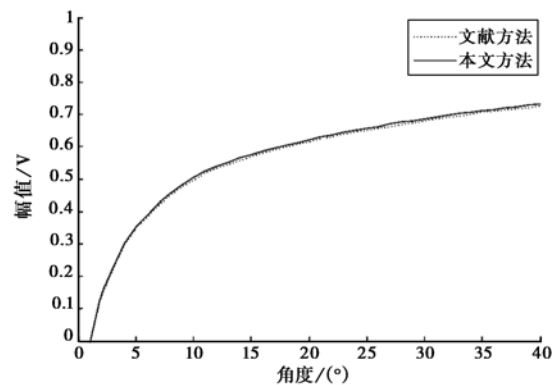


图 3 算例对比

从图 3 可以看出:本文方法计算结果与文献中

的计算结果基本吻合,这说明本文方法的有效性。表1统计了时间步长分别为0.0044 ns、0.0088 ns和0.0176 ns时本文方法和采用常规ADI-FDTD算法时的计算误差。误差定义为

$$e_{rr} = \sqrt{\sum_{\theta=1^\circ}^{50^\circ} (\mathbf{E}_\theta - \mathbf{E}_\theta^{\text{ref}})^2} / \sqrt{\sum_{\theta=1^\circ}^{50^\circ} (\mathbf{E}_\theta^{\text{ref}})^2} \quad (28)$$

式中: $\mathbf{E}_\theta$ 为仿真计算值; $\mathbf{E}_\theta^{\text{ref}}$ 为理论参考值,理论值取文献[6]中的 Harmuth 算例值。

表1 算法误差对比

时间步长/ns	本文方法/%	常规 ADI-FDTD
0.004 4	4.1	5.9
0.008 8	6.5	10.3
0.017 6	11.2	19.1

从表1的对比可以看出:在时间步长取不同值时本文算法计算结果的误差都小于常规ADI-FDTD的计算误差,这说明本文提出的改进算法可有效降低分析电磁波在有耗介质中传播时的计算误差。

3.2 改进 ADI-FDTD 在二维散射问题中的应用

采用本文方法分析半径为1 cm的金属球体对电磁波的散射。入射波如图4所示。

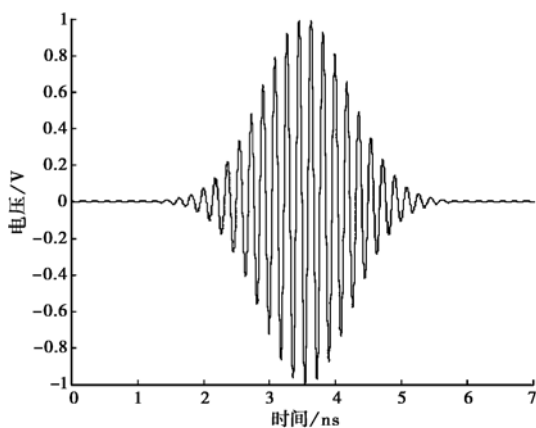


图4 入射波示意图

图5给出了当金属球体分别处于空气、地面上方和海平面上方时的电磁散射曲线。

从图5可以看出:介质损耗程度的增大在一定程度上能增大电磁散射,但电磁散射的震荡加剧。从式(1)可以看出:相对无损耗介质,有耗介质的复介电常数的虚部相当于存在附加的介质,这种附加的介质带来的电磁散射,使得有耗介质电磁散射更大,并且随着介质损耗程度的增大而增大。由于电

磁散射在不同角度除受无耗介质电磁散射的影响外,还受到复介电常数中虚部的影响,因此,有耗介质电磁散射在不同角度的差别要大于在无耗介质中的差别,在某个角度范围就表现出电磁散射振荡加剧的特点。这与图5的仿真结果一致。

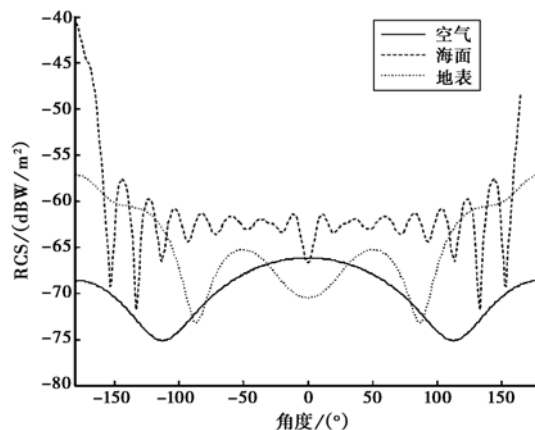


图5 不同介质中电磁散射对比

4. 结 论

本文提出了改进的ADI-FDTD算法来分析电磁波在有耗介质中的传播情况,该算法可有效降低传统ADI-FDTD算法因受CFL稳定性条件限制造成的计算误差。通过分析,证明本文提出方法的无条件稳定性,并分析了算法的数值色散。通过算例对比验证了本文方法的有效性。最后,采用本文方法分析了金属球体在不同有耗介质中的散射特性,仿真结果表明:介质损耗的增大会造成电磁散射震荡的加剧。本文提出的算法在分析实际环境中电磁波的传播方面具有一定的参考意义。

参考文献

- [1] 唐涛, 廖成, 杨丹. FDTD求解高功率微波大气传播问题的可行性研究[J]. 电波科学学报, 2010, 25(1): 122-126.
TANG Tao, LIAO Cheng, YANG Dan. Feasibility of solving high-power microwave propagation in the atmosphere using FDTD method[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2010, 25(1): 122-126. (in Chinese)
- [2] 高本庆, 薛正辉, 任武. FDTD计算中关于低频激励源问题的研讨[J]. 电波科学学报, 2009, 24(2): 213-217.
GAO Benqing, XUE Zhenghui, REN Wu. Study on low frequency exciting source in FDTD simulation[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2009, 24(2): 213-

217. (in Chinese)
- [3] ZHENG H X, LEUNG K W. A nonorthogonal ADI-FDTD algorithm for solving two dimensional scattering problems[J]. IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 2009, 57(12): 3891-3902.
- [4] 汤 炜, 闫玉波, 李清亮, 等. 一种新时域交替隐式差分算法在散射问题中的应用[J]. 物理学报, 2004, 53(12): 4173-4180.
TANG Wei, YAN Yubo, LI Qingliang, et al. A new ADI-FDTD analysis in electromagnetic scattering[J]. Acta Physica Sinica, 2004, 53(12): 4173-4180. (in Chinese)
- [5] TAN E L, HEH D Y. ADI-FDTD method with fourth order accuracy in time[J]. IEEE Microwave and Wireless Components letters, 2008, 18(5): 296-298.
- [6] 王长清, 祝西里, 陈国华, 等. Maxwell 方程用于电磁脉冲在有耗介质中的传播问题[J]. 电波科学学报, 1999, 14(1): 97-101.
WANG Changqin, ZHU Xili, CHEN Guohua, et al. Probe into the suitability of the Maxwell equations for the propagation of the electromagnetic pulse wave in the lossy media[J]. Chinese Journal of Radio Science, 1999, 14(1): 97-101. (in Chinese)
- [7] 王长清, 祝西里, 丁 柱, 等. 磁偶极子激励的脉冲电磁波在有耗介质中的传播[J]. 微波学报, 1998, 14(2): 142-146.
WANG Changqin, ZHU Xili, DING Zhu, et al. Propagation of the electromagnetic pulse wave excited by the magnetic dipole in the lossy media[J]. Journal of Microwaves, 1998, 14(2): 142-146. (in Chinese)
- [8] 李庆伟, 曹俊兴, 杜兴忠. 有耗介质中电磁波传播的时域有限差分法[J]. 勘探地球物理进展, 2007, 30(3): 185-189.
LI Qingwei, CAO Junxing, DU Xingzhong. FDTD method for propagation of electromagnetic wave in lossy media[J]. Progress in Exploration Geophysics, 2007, 30(3): 185-189. (in Chinese)
- [9] JUNG K Y, TEIXEIRA F L, LEE R. Complex envelop PML-ADI-FDTD method for lossy anisotropic dielectrics[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2007, (6): 643-646.
- [10] PERADA J A, GRANDE A, GONZALEZ O, et al. Analysis of two alternative ADI-FDTD formulations for transverse-electric waves in lossy materials[J]. IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 2009, 57(7): 2047-2054.
- [11] GARCIA S G, LEE T, HAGNESS S. On the accuracy of the ADI-FDTD method[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2001, (1): 31-34.
- [12] 葛德彪, 闫玉波. 电磁波时域有限差分法[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2005: 318-332.
- [13] ROUF H K, COSTEN F, GARCIA S G. Reduction of numerical errors in frequency dependent ADI-FDTD[J]. Electronics Letters, 2010, 46(7): 489-490.
- [14] EDELVIK F, SCHUHMANN R, WEILAND T. A general stability analysis of FIT/FDTD applied to lossy dielectrics and lumped elements[J]. Journal of Numerical Modelling: Electronics Network, Devices and Fields, 2004, 17(4): 407-419.
- [15] FU W M, TAN E L. Stability and dispersion analysis for ADI-FDTD method in lossy media[J]. IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 2007, 55(4): 1095-1102.

作者简介



张玉廷 (1984—), 男, 山东人, 工程师, 博士, 主要从事计算电磁学和电磁兼容性等方面的研究。



蔡 智 (1985—), 女, 辽宁人, 硕士, 主要从事新能源材料学和知识产权等方面的研究。



刘 胜 (1957—), 男, 吉林人, 教授, 博士, 主要从事船舶运动与控制、电磁兼容性和复杂性科学等方面的研究。

Electromagnetic wave propagation in loss media based on ADI-FDTD

ZHANG Yu-ting¹ CAI Zhi² LIU Sheng³

(1. *Institute of Spacecraft System Engineering CAST, Beijing 100094, China;*

2. *Ministry of Industry and Information Technology Software and
Integrated Circuit Promotion Center, Beijing 100038, China;*

3. *College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin Heilongjiang 150001, China)*

Abstract Aiming at the propagation characteristics of electromagnetic waves in loss media, a modified alternative direction implicit finite difference time domain (ADI-FDTD) method is proposed to solve the problem. The modified method can improve the disadvantage of the traditional ADI-FDTD method, which improves the computational efficiency on the cost of accuracy. The unconditional stability of the algorithm is proved, while the numerical dispersion is also analyzed. The algorithm is validated effectively, and it could also improve computational accuracy, which has been proved by examples comparison. The algorithm is applied to analyze the scattering of a metal sphere in air, on the bottom of ground and sea. The simulation shows that the amplitude and oscillation of the scattering increase in the loss media.

Key words alternative implicit finite difference time domain method; loss media; unconditional stability; numerical dispersion; electromagnetic wave