

郭付阳, 张子敬, 杨林森. 线性调频信号时/频差估计算法[J]. 电波科学学报, 2016, 31(1): 166-172. DOI: 10.13443/j.cjors.2015031501
GUO F Y, ZHANG Z J, YANG L S. TDOA/FDOA estimation algorithm for linear frequency modulated signals[J]. Chinese journal of radio science, 2016, 31(1): 166-172. (in Chinese). DOI: 10.13443/j.cjors.2015031501

线性调频信号时/频差估计算法

郭付阳 张子敬 杨林森

(西安电子科技大学 雷达信号处理国家重点实验室, 西安 710071)

摘 要 提出了一种新的快速估计线性调频信号时/频差的算法. 该算法将抽取的自模糊函数与 Radon 变换结合估计线性调频信号的调频率, 通过分数阶傅里叶变换估计出模糊函数脊线与频率轴交点位置, 应用解调频沿脊线搜索模糊函数峰值. 对于接收信号中存在多分量的情况, 根据其模糊函数脊线位置的不同, 该算法能够分辨各分量信号, 并分别精确估计出各分量的时/频差. 由于只需一维搜索模糊函数峰值, 并可用快速傅里叶变换实现, 该算法大大减少了运算量. 仿真实验表明, 随着信噪比的提高, 该算法估计的时/频差均方误差逐渐逼近克拉美-罗下界.

关键词 分数阶傅里叶变换; 抽取的模糊函数; 时/频差估计; 解调频; 线性调频信号

中图分类号 TN911.72

文献标志码 A

文章编号 1005-0388(2016)01-0166-07

DOI 10.13443/j.cjors.2015031501

TDOA/FDOA estimation algorithm for linear frequency modulated signals

GUO Fuyang ZHANG Zijing YANG Linsen

(National Lab of Radar Signal Processing Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract A novel efficient algorithm for time difference of arrival (TDOA) and frequency difference of arrival (FDOA) estimation between two linear frequency modulated (LFM) signals is proposed in this paper. The proposed approach combines decimated ambiguity function and Radon transform to estimate the chirp rate of the LFM signal; then fractional Fourier transform (FrFT) is used to estimate the point of intersection between the ridge and Doppler axis; finally the peak of ambiguity function is searched efficiently along the ridge by using of dechirping. For the multi-component LFM signal, since different LFM signals have different ridges, the proposed approach can successfully distinguish each LFM signal from the received signal, and both the TDOA and FDOA of each LFM signal can be estimated precisely. Due to fast Fourier transform-based processing and the use of only one-dimensional searches, the proposed approach is computationally efficient. Simulation results show that with the increase of signal noise ratio (SNR), the variances of the estimates are gradually close to the Cramer-Rao lower bound.

Keywords fractional Fourier transform (FrFT); decimated ambiguity function; TDOA/FDOA estimation; dechirping; LFM signal

收稿日期: 2015-03-15

资助项目: 国家自然科学基金(No. 61172137)

联系人: 郭付阳 E-mail: guofuyang@126.com

引 言

两路信号间的时延差和多普勒频差的估计是信号处理的基本问题之一,在目标定位和跟踪等领域有重要应用^[1-4]. 线性调频(Linear Frequency Modulated, LFM)信号是雷达中常见的发射信号^[5-7],研究 LFM 信号的时/频差快速精确估计对雷达辐射源的精确定位有着重要意义.

常用的时/频差估计方法主要基于模糊函数^[8-10]. 模糊函数的峰值位置对应真实的时/频差,然而二维搜索模糊函数的峰值,需要巨大的运算量,难以满足实时处理的要求. 为此,Stein 在文献[8]中提出了先粗估计再精估计的算法,并给出了连续信号时/频差估计的克拉美-罗界. 根据现实中多普勒频率远小于采样频率这一信息,文献[9]采用滤波抽取的方法将模糊函数计算区域限定在感兴趣的区域,避免了计算完整的模糊函数. 根据 LFM 信号模糊函数存在一条过峰值的脊线的特点,Sharif 在文献[10]中提出了沿着模糊函数脊线方向搜索峰值的算法,但是其对调频率的估计需要计算完整的模糊函数,并且其在沿脊线搜索的过程中采用逐点搜索,运算量较大. 文献[11]提出了抽取的模糊函数,并给出了基于二维快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, FFT)的快速算法,它保留了模糊函数的轮廓,但不能保证模糊函数真实峰值在抽取后的点阵上,因而不能有效估计时/频差.

分数阶傅里叶变换(Fractional Fourier Transform, FrFT)作为傅里叶变换的推广,处理 LFM 信号具有天然的优势,目前广泛应用于 LFM 信号的检测和参数估计^[12-15]. 一个 LFM 信号在适当的分数阶傅里叶变换域上为一个冲击函数,表现为 LFM 信号在该阶上的能量聚集性. 由于信号的时延和频移会引起其分数域上幅度谱的平移,文献[16]通过在不同分数域上模相关,提出了一种基于 FrFT 的时/频差联合估计算法. 然而,该算法由于采用模相关,在低信噪比下,当变换阶次非最优阶时,估计效果不佳.

为了实现时/频差的快速精确估计,本文提出了一种沿脊线快速搜索峰值的算法. 首先,联合 Radon 变换和抽取的模糊函数快速估计调频率,并且利用 FrFT 精确估计出模糊函数脊线与频率轴交点. 在沿脊线搜索峰值时,应用解调频将逐点搜索转化为一次相关,由相关峰的位置估计出时/频差. 该方法能快速实现模糊函数的一维峰值搜索过程,并能精

确分辨出多分量 LFM 信号.

1 信号模型

假设 $y_1(t)$ 为第一路接收信号,由单分量 LFM 信号 $s(t)$ 和噪声 $\omega_1(t)$ 构成, $y_2(t)$ 为第二路接收信号,包含了 R 个分量信号和噪声 $\omega_2(t)$ 为

$$\begin{cases} y_1(t) = s(t) + \omega_1(t) \\ y_2(t) = \sum_{k=1}^R y_{2,k}(t) + \omega_2(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中:

$$s(t) = \text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)e^{j(2\pi\kappa t + \pi m t^2)}, \quad (2)$$

$\text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$ 为 $[0, T]$ 上的门函数, T 为信号持续时间, κ 为 $y_1(t)$ 的初始频率, m 为 LFM 信号的调频率; $\omega_1(t)$ 和 $\omega_2(t)$ 为互不相关的加性白噪声; $y_{2,k}(t) = s(t - \Delta t_{dk})e^{j2\pi\Delta f_{dk}t}$ 为无噪声时 $y_2(t)$ 的第 k 个分量, $k = 1, \dots, R$, Δt_{dk} 和 Δf_{dk} 为 $y_{2,k}(t)$ 相对 $y_1(t)$ 的时差和多普勒频差,为待估计的参数.

2 抽取的模糊函数与 FrFT

2.1 抽取的模糊函数

信号 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的模糊函数(Ambiguity Function, AF)^[8] 定义为

$$\chi_{fg}(\tau, \nu) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t-\tau)e^{-j2\pi\nu t} dt \right|. \quad (3)$$

当 $f(t) = g(t)$ 时,称 $\chi_{fg}(\tau, \nu)$ 为自模糊函数.

信号 $f(t)$ 和 $g(t)$ 抽取的模糊函数(Decimated Ambiguity Function, DAF)^[11] 为两信号模糊函数时间和频率经 D 倍抽取后的值:

$$\text{DAF}_{fg}(\xi, \eta) = \chi_{fg}(\xi D, \eta D), \quad (4)$$

ξ 和 η 分别为时间和频率 D 倍抽取后的变量. 图 1 仿真了 LFM 信号的模糊函数及抽取的模糊函数,由仿真图可以看出,LFM 信号抽取的模糊函数基本保留了完整模糊函数脊线的位置信息.

2.2 分数阶傅里叶变换

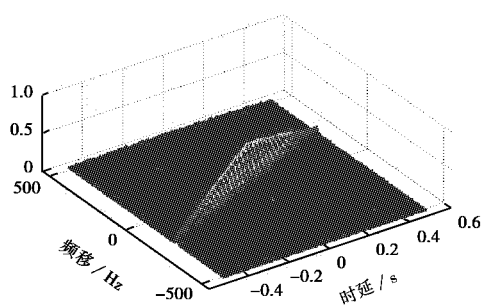
定义信号 $x(t)$ 在 α 角度上的 FrFT^[17] 为

$$X_\alpha(u) = F_\alpha(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)K_\alpha(t, u)dt. \quad (5)$$

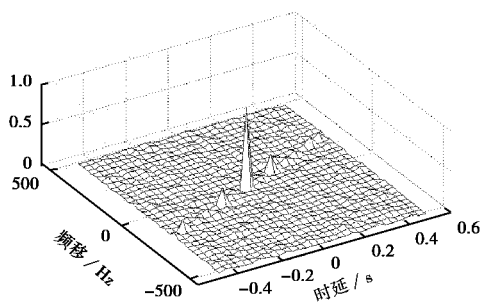
式中, $K_\alpha(t, u)$ 为核函数,

$$K_\alpha(t, u) = \begin{cases} A_\alpha e^{j(\pi(u^2+t^2)\cot\alpha - 2\pi ut\csc\alpha)} & \alpha \neq n\pi \\ \delta(t-u) & \alpha = 2n\pi \\ \delta(t+u) & \alpha = (2n+1)\pi \end{cases}, \quad (6)$$

α 为旋转的角度, $A_\alpha = \sqrt{1-j\cot\alpha}$. 我们常用阶数 p



(a) 模糊函数



(b) 32 倍抽取的模糊函数

图 1 LFM 信号模糊函数和抽取的模糊函数

$= 2\alpha/\pi$ 来表示 FrFT 的角度。

对于一个有限时长的线性调频信号,其维格纳-威利分布(Wigner-Ville Distribution, WVD)在时频图上呈现为斜刀型分布,如图 2 所示。当角度 α 垂直于 LFM 信号时频图的脊线,即 $\alpha = -\text{arccot } m$ 时,信号在该分数域上投影出一个峰值,称该角度 α 为最优的角度,记为 α_{opt} ,对应的阶数称为最优阶,记为 p_{opt} 。对于式(1)中的 $y_1(t)$,其初始频率为 κ ,在最优阶 p_{opt} 上的峰值位置记为 u_0 ,由图 2 中几何关系可知:

$$\kappa = \frac{u_0}{\sin(\alpha_{\text{opt}})} = u_0 / \sin\left(\frac{\pi}{2} p_{\text{opt}}\right). \quad (7)$$

对于 $y_2(t)$,各分量的初始频率 f_{0k} 分别为

$$f_{0k} = \kappa + \Delta f_{dk} - m\Delta t_{dk}, \quad (8)$$

与式(7)类似,同样可得

$$f_{0k} = u_{0k} / \sin\left(\frac{\pi}{2} p_{\text{opt}}\right). \quad (9)$$

3 LFM 信号快速时 / 频差估计

3.1 联合抽取的模糊函数与 Radon 变换估计调频率

Radon-Ambiguity 变换(Radon-Ambiguity Transform, RAT)^[18] 常用于 LFM 信号的检测和估计,其定义为

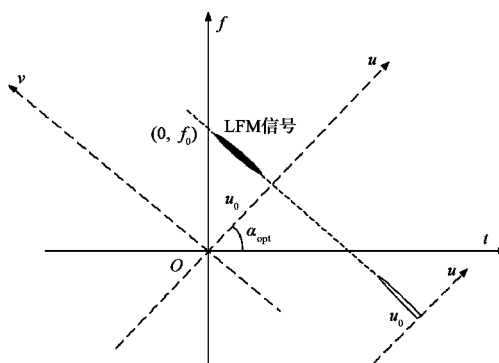


图 2 FrFT 与 WVD 投影关系示意图

$$\begin{aligned} R(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{ff}(\tau, v) dl \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{ff}(-l \sin \theta, l \cos \theta) dl. \end{aligned} \quad (10)$$

式中, $\chi_{ff}(\tau, v)$ 为信号 $f(t)$ 的自模糊函数。当 $f(t)$ 为 LFM 信号时, $\chi_{ff}(\tau, v)$ 的脊为过原点的一条直线,此时只需要对 $R(\theta)$ 进行一维峰值搜索即可获得调频率的估计,记最大峰值对应的角度为 θ_{max} ,则调频率的估计 $\hat{m} = \tan(\theta_{\text{max}} - 90^\circ)$ 。RAT 需要计算信号的自模糊函数,在实际情况下,这往往意味着不小的运算量。由于计算抽取的模糊函数所需的运算量较小^[11],且适当抽取的模糊函数可以保留脊线的主要特性,因此可结合 Radon 变换和抽取的模糊函数来代替 RAT 方法估计 LFM 信号的调频率。

3.2 利用 FrFT 估计模糊函数脊线与频率轴交点

第 k 个分量 $y_{2,k}(t)$ 与 $y_1(t)$ 的互模糊函数脊线为过峰值点 $(\Delta t_{dk}, \Delta f_{dk})$,斜率为 m 的直线,脊线交频率轴于 $(0, \Delta f_{dk} - m\Delta t_{dk})$ 点。联立 2.2 节中式(7)、(8)和(9),可得

$$\Delta f_{dk} - m\Delta t_{dk} = \frac{u_{0k} - u_0}{\sin\left(\frac{\pi}{2} p_{\text{opt}}\right)}. \quad (11)$$

根据式(11),由两路信号在最优阶上峰值的位置差 $u_{0k} - u_0$ 即可求解出互模糊函数脊线与频率轴交点坐标。

3.3 利用解调频沿脊线一维搜索模糊函数峰值

在无噪声的环境中,分别对 $y_1(t)$ 和 $y_{2,k}(t)$ 乘上 $e^{-j\pi m' t^2}$,记新的信号分别为 $y'_1(t)$ 和 $y'_{2,k}(t)$,即

$$y'_1(t) = y_1(t) \exp(-j\pi m' t^2), \quad (12)$$

$$y'_{2,k}(t) = y_1(t - \Delta t_{dk}) e^{j2\pi \Delta f_{dk} t} e^{-j\pi m' t^2}. \quad (13)$$

将解调频后的信号代入式(3),有

$$\chi'_{y'_{2,k} y'_1}(\tau, v) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} y'_{2,k}(t) y'^*_1(t - \tau) e^{-j2\pi v t} dt \right|$$

$$= \left| \int_{\max(\Delta t_{dk}, \tau)}^{T+\min(\Delta t_{dk}, \tau)} \exp[-j2\pi(v - (\Delta f_{dk} - m'\Delta t_{dk}) - (m - m')(\tau - \Delta t_{dk}))t] dt \right|. \quad (14)$$

可见,新的模糊函数的脊线方程为

$$v = \Delta f_{dk} - m'\Delta t_{dk} + (m - m')(\tau - \Delta t_{dk}), \quad (15)$$

峰值为 $(\Delta t_{dk}, \Delta f_{dk} - m'\Delta t_{dk})$, 脊线斜率为 $m - m'$. 如图 3 所示, 当 $\tau = 0$ 时, $v = \Delta f_{dk} - m\Delta t_{dk}$, 可见信号解调频后, 新的模糊函数的脊线与频率轴的交点坐标仍为 $(0, \Delta f_{dk} - m\Delta t_{dk})$. 当 $m' = m$, 即两路信号正确解调频时, 模糊函数的脊线旋转至平行于 τ 轴, 此时两路信号为频率相差 $\Delta f_{dk} - m\Delta t_{dk}$ 的单频信号, 对信号频率补偿后, 可通过一次时域相关估计出解调频后模糊函数 $\chi_{y_{2,k}, y_1'}(\tau, v)$ 的峰值坐标, 进而估计出 $y_{2,k}(t)$ 相对 $y_1(t)$ 的时/频差 Δt_{dk} 和 Δf_{dk} .

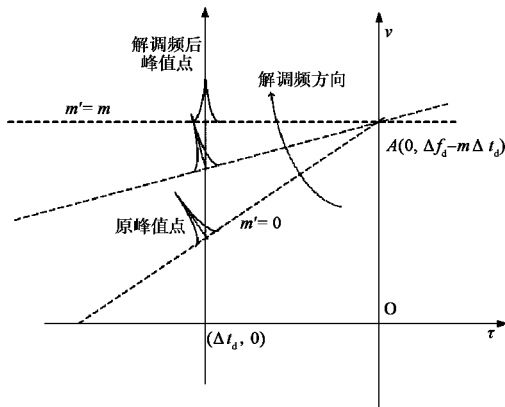


图 3 解调频对 LFM 信号模糊函数脊线的影响示意图

3.4 多分量信号分辨性能分析

多分量信号间的干扰会降低参数估计的性能. 为了抑制多分量的影响, 在估计第 k 个分量信号的时/频差时, 可对其他分量的最优阶 FrFT 进行峰值遮蔽处理^[13], 实现分数阶傅里叶变换域滤波, 再将滤波后的信号逆变换回时域处理. 显然, 该方法必须先分辨出各分量信号才能完成以上处理过程, 在本节分析了算法对多分量信号的分辨性能.

式(1)中的各分量信号是 LFM 信号 $s(t)$ 经不同时延和频移后的结果, 因此各分量信号具有相同的最优阶. 由文献[15]可知, 有限长 LFM 信号 $s(t)$ 在最优阶 p_{opt} 的分数阶幅度谱为一个 $\sin c$ 函数, 且有

$$\begin{aligned} |S(u)| &= |F_{\alpha_{opt}}(s(t))| \\ &= A_{\alpha_{opt}} T |\sin c(\pi T \csc \alpha_{opt} u)|. \end{aligned} \quad (16)$$

根据 FrFT 的时延和频移性质, 各分量的分数阶幅

度谱表现为 $s(t)$ 分数阶幅度谱 $|S_{p_{opt}}(u)|$ 的平移, 即

$$|Y_{2,k}(u)| = |S(u - \Delta t_{dk} \cos \alpha_{opt} - \Delta f_{dk} \sin \alpha_{opt})|. \quad (17)$$

当两个分量的最优阶 FrFT 峰值间隔小于其最优阶幅度谱主瓣 3 dB 宽度时, 我们就认为分辨出了这两个分量信号. 因此, 本方法对多分量信号的分辨率为

$$\Delta u = \frac{\text{Width}(\sin c)}{\pi T |\csc \alpha_{opt}|} \approx \frac{0.44 |\sin \alpha_{opt}|}{\pi T}, \quad (18)$$

Width($\sin c$) 为 $\sin c$ 函数主瓣的 3 dB 宽度, 约为 0.44.

4 仿真实验及分析

4.1 调频率的估计

调频率的估计直接影响到时/频差估计的精度, 算法联合 Radon 变换和抽取的模糊函数来估计调频率, 本节仿真了抽取因子对调频率估计的影响. 图 4 为不同抽取倍数所估计到的调频率的均方误差, 信号调频率为 $m = 3.125 \times 10^7$ Hz/s. 由图 4 可以看出, 信噪比为 -10 dB 时, 无抽取和 4 倍抽取能够准确估计出调频率, 而 8 倍抽取获得了错误的估计, 这是因为随着抽取倍数的提高, 抽取的模糊函数脊上的点在减少, Radon 变换积累出的峰值能量降低, 更容易湮没在强噪声中. 然而, 在信噪比满足三种抽取都能够估计出调频率时, 三者估计出调频率的均方误差基本一致. 这说明适当倍数的抽取对调频率估计的影响很小, 本文所提出的联合 Radon 变换和抽取的模糊函数来估计调频率是可靠的.

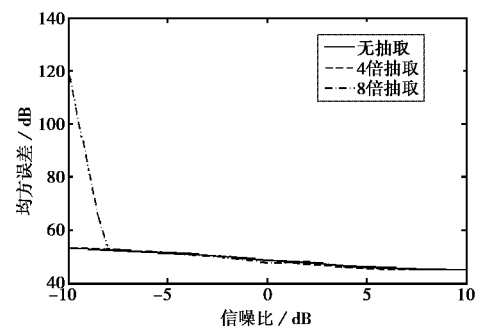


图 4 调频率估计的均方误差

对于多分量信号, 调频率相同导致 Radon 变换无法将其分辨. 由 3.4 节可知, 多分量 LFM 信号在最优阶的幅度谱位置不同. 由于 LFM 信号在最优阶表现出能量聚集性, 各分量的峰值主瓣很窄, 且

FrFT 为线性变换,多分量信号的 FrFT 不会产生交叉项干扰,因此算法对多分量信号具有很强的分辨能力.图 5 给出了 0 dB 信噪比下调频率相同的三分量 LFM 信号在最优阶 FrFT 的归一化幅度谱,从图 5 可以清晰分辨出这 3 个分量信号.

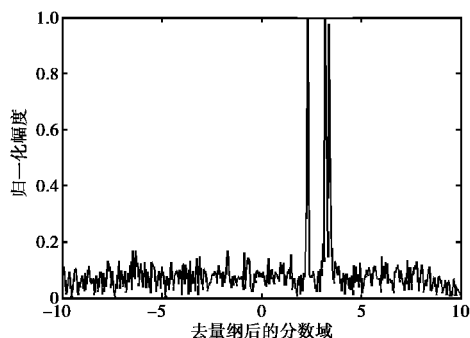
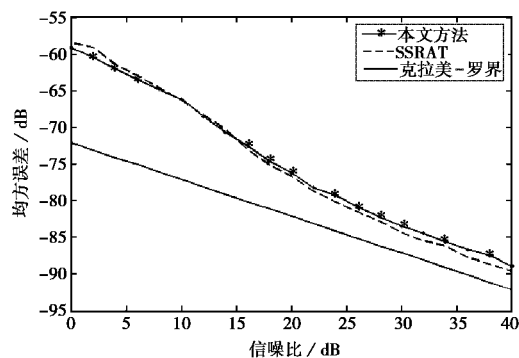


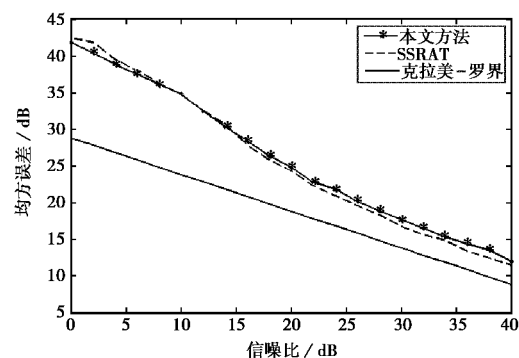
图 5 三分量 LFM 信号最优阶幅度谱

4.2 时/频差的估计

选取 LFM 信号带宽 $B=1$ MHz,信号持续时间为 $80 \mu\text{s}$,调频率 $m=1.25 \times 10^{10}$ Hz/s, $y_1(t)$ 的初始频率 $\kappa=0$,采样率 $f_s=4$ MHz,观测时间为 $100 \mu\text{s}$,抽取因子 $D=8$. $y_2(t)$ 为单分量信号,时频差为 $(\Delta t_d, \Delta f_d)=(-0.5 \mu\text{s}, -3200 \text{ Hz})$.图 6 仿真了本文方法和文献[10]的单切片 RAT (SingleSlice



(a) 时差均方误差



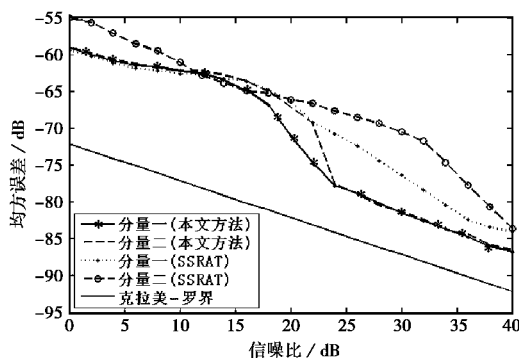
(b) 频差均方误差

图 6 单分量信号时/频差估计的均方误差

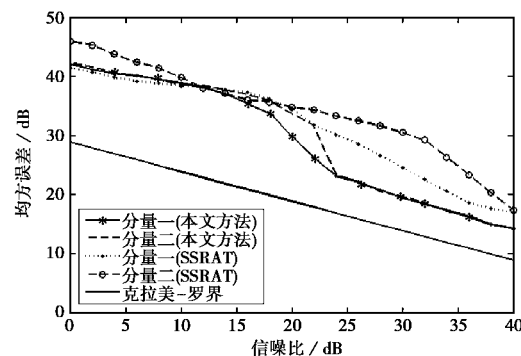
Radon Ambiguity Transform, SSRAT)方法对单分量 LFM 信号时/频差估计的均方误差.可以看出,两种方法所估计到的时/频差均方误差基本一致,随着信噪比的提高,时差和频差的均方误差逐渐逼近克拉美-罗界,在 40 dB 信噪比下,时/频差均方误差比克拉美-罗界高约 3 dB.

为了检验本算法对多分量信号的时/频差估计效果,信号 $y_2(t)$ 中除了原有的分量 $(\Delta t_d, \Delta f_d)=(-0.5 \mu\text{s}, -3200 \text{ Hz})$ 外,再加入一个调频率相同而时/频差为 $(1.25 \mu\text{s}, 8000 \text{ Hz})$ 的分量,其余参数保持不变.

图 7 为分别用本文方法和 SSRAT 方法在以上参数条件下仿真得到的时/频差估计均方误差图.由图 7 可以看出,对于多分量 LFM 信号的时/频差估计,本文所提的方法处理要优于 SSRAT 方法,这主要是由于本文方法在最优阶分数域对多分量 LFM 信号进行了分离,能够有效降低各分量信号间的干扰.



(a) 时差均方误差



(b) 频差均方误差

图 7 双分量信号时/频差估计的均方误差

4.3 算法运算量

在调频率已知时,本文方法只需要计算两路接收信号的最优阶 FrFT 和一次相关,由于计算 FrFT 的运算量与 FFT 相当^[17],本文方法的运算复杂度

为 $O(N\log_2 N)$. 文献[10]中给出的 SSRAT 算法的运算量,是在信号调频率已估计到的前提下的运算量,其计算复杂度为 $O(N^2)$.

在调频率未知时,SSRAT 方法需要先计算信号的自模糊函数,而本文方法只需要计算信号抽取的自模糊函数.表 1 比较了调频率未知时 SSRAT 算法和本方法的运算量,抽取因子 $D=8$.从表 1 可以看出,本文提出的算法大幅降低了运算量,在 $N=1\ 000$ 时其运算量仅为 SSRAT 算法运算量的 2.88%,运算速度明显优于 SSRAT 算法.

表 1 本文方法和 SSRAT 方法运算量对比

算法	运算量(复乘次数)	$N=1\ 000$
本文算法	$\frac{3M^2}{2D^2}\log_2 M + M +$	3.5×10^5
	$9N\log_2 N + 10N$	
SSRAT 算法	$N^2\log_2 N + 2N^2 +$	1.2×10^7
	$5N\log_2 N$	

5 结 论

针对 LFM 信号,提出了一种新的快速估计其时/频差的算法.该算法首先对抽取的自模糊函数做 Radon 变换估计调频率,并利用最优阶 FrFT 估计出模糊函数脊线与频率轴交点,最后应用解调频沿脊一维搜索模糊函数峰值.由于抽取的模糊函数耗费的运算量较少,并用一次相关实现沿脊搜索峰值的过程,算法在运算速度上具有明显优势.本算法能够有效分辨多分量信号,并分别精确估计出各分量的时/频差.本文给出了算法所需的一些理论推导,仿真实验验证了本文的结论.

参考文献

- [1] 孙正波,叶尚福.利用互模糊函数实现卫星干扰源定位[J].电波科学学报,2004,19(5):525-529.
SUN Z B, YE S F. Satellite interference location using cross ambiguity function[J]. Chinese journal of radio science, 2004, 19(5): 525-529. (in Chinese)
- [2] 孙正波,叶尚福.一种时差/频率差快速联合估计方法[J].电波科学学报,2006,21(5):641-646.
SUN Z B, YE S F. Fast algorithm for joint estimation of DTO and DFO[J]. Chinese journal of radio science, 2006, 21(5): 641-646. (in Chinese)
- [3] 曲付勇,孟祥伟.基于约束总体最小二乘方法的到达时差到达频差无源定位算法[J].电子与信息学报,2014,36(5):1075-1081.
QU F Y, MENG X W. Source localization using TDOA and FDOA measurements based on constrained total least squares algorithm[J]. Journal of electronics & information technology, 2014, 36(5): 1075-1081. (in Chinese)
- [4] 李昕.基于双通道 DFRFT 互谱法的 Chirp 信号时延估计[J].电子学报,2014,42(6):1068-1073.
LI X. Time delay estimation of chirp signals based on doubled-channel DFRFT cross-spectrum [J]. Acta electronica sinica, 2014, 42(6): 1068-1073. (in Chinese)
- [5] CHEN X L, GUAN J, LIU N B, et al. Maneuvering target detection via radon-fractional Fourier transform-based long-time coherent integration[J]. IEEE transactions on signal processing, 2014, 62(4): 939-953.
- [6] 朱文涛,苏涛,杨涛,等.线性调频连续波信号检测与参数估计算法[J].电子与信息学报,2014,36(3):552-558.
ZHU W T, SU T, YANG T, et al. Detection and parameter estimation of linear frequency modulation continuous wave signal[J]. Journal of electronics & information technology, 2014, 36(3): 552-558. (in Chinese)
- [7] 朱文涛,苏涛,杨涛,等.低信噪比下线性调频连续波信号的参数估计[J].电波科学学报,2013,28(6):1158-1164.
ZHU W T, SU T, YANG T, et al. Parameter estimation of linear frequency modulated continuous wave signal in low SNR[J]. Chinese journal of radio science, 2013, 28(6): 1158-1164. (in Chinese)
- [8] STEIN S. Algorithms for ambiguity function processing[J]. IEEE transactions on ASSP, 1981, 29(3): 588-599.
- [9] TOLIMIERI R, WINOGRAD S. Computing the ambiguity surface [J]. IEEE transactions on ASSP, 1985, 33(4): 1239-1245.
- [10] SHARIF M R, ABEYSEKERA S S. Efficient wide-band signal parameter estimation using a radon-ambiguity transform slice[J]. IEEE transactions on AES, 2007, 43(2): 673-688.
- [11] AUSLANDER L, TOLIMIERI R. Computing decimated finite cross-ambiguity functions [J]. IEEE transactions on ASSP, 1988, 36(3): 359-364.
- [12] 杜雨铭,杨建宇.基于 FRFT 的 LFM CW 雷达加速目标检测与参数估计[J].电波科学学报,2005,20(6):815-819.
DU Y M, YANG J Y. Novel method of moving target detection and parameter estimation for LFM CW

- radar[J]. Chinese journal of radio science, 2005, 20 (6): 815-819. (in Chinese)
- [13] 史文国, 徐向辉. 基于分数阶傅里叶变换的多分量线性调频信号检测和参数估计的快速自适应方法[J]. 科学技术与工程, 2012, 12(7): 1517-1521.
SHI W G, XU X H. Fast adaptive method of the multi-LFM signal detection and parameter estimation based on fractional Fourier transform [J]. Science technology and engineering, 2012, 12 (7): 1517-1521. (in Chinese)
- [14] 李会勇, 许丁文, 胡进峰, 等. 基于 FRFT 的天波雷达多机动目标检测[J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(9): 1725-1730.
LI H Y, XU D W, HU J F, et al. FRFT based algorithm for maneuvering target detection with OTH Radar[J]. Systems engineering and electronics, 2014, 36(9): 1725-1730. (in Chinese)
- [15] 刘锋, 徐会法, 陶然, 等. 分数阶 Fourier 域多分量 LFM 信号间的分辨研究[J]. 中国科学(信息科学), 2012, 42(2): 136-148.
LIU F, XU H F, TAO R, et al. Research on resolution among multi-component LFM signals in the fractional Fourier domain[J]. Science China (information science), 2012, 42(2): 136-148. (in Chinese)
- [16] OONINCX P J. Joint time-frequency offset detection using the fractional fourier transform[J]. Signal processing, 2008, 88: 2936-2942.
- [17] OZAKTAS H M, ARIKAN O, KUTAY M A, et al. Digital computation of the fractional Fourier transform [J]. IEEE transactions on signal processing, 1996, 44(9): 2141-2150.
- [18] WANG M S, CHAN A K, CHUI C K. Linear frequency-modulated signal detection using radon-ambiguity transform[J]. IEEE transactions on signal processing, 1998, 46(3): 571-586.

作者简介

郭付阳 (1991—), 男, 江西人, 博士研究生, 研究方向为时频分析、雷达信号处理.

张子敬 (1967—), 男, 陕西人, 教授, 博士生导师, 研究方向为无源定位、雷达信号处理.

杨林森 (1988—), 男, 陕西人, 博士研究生, 研究方向为时频分析、雷达信号处理.