第29卷 第2期
2014年4月

电 波 科 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF RADIO SCIENCE

Vol. 29, No. 2
April, 2014

潘灿林,张 明,薄亚明. 三维电大物体四面体剖分公共面快速查找算法[J]. 电波科学学报, 2014, 29(2): 310-315. doi: 10.13443/j.cjors.2013042402.

PAN Canlin, ZHANG Ming, BO Yamin. Fast common facet finding algorithm for tetrahedral discretization of three-dimensional electrically large bodies[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2014, 29(2): 310-315. (in Chinese). doi: 10.13443/j.cjors.2013042402.

# 三维电大物体四面体剖分公共面快速查找算法

潘灿林 张 明 薄亚明

(南京邮电大学电子科学与工程学院,江苏 南京 210003)

**关键词** 提出了一种查找四面体公共面的快速算法,用于矩量法为基础的体积分方程通用求解算法. 该算法可用图的邻接矩阵和关联矩阵概念及其原理导出,并可通过稀疏矩阵的转置与乘法实现,其计算与存储复杂度均为 $O(N)$. 数值例算结果验证了该算法的有效性,结果比较表明所提算法计算量更少,可用于电大尺寸介质体电磁场分析的前处理中,用以构成通用的分析软件或算法测试平台.

**关键词** 矩量法;体积分方程;前处理;快速算法

**中图分类号** TN011 **文献标志码** A **文章编号** 1005-0388(2014)02-0310-06

# Fast common facet finding algorithm for tetrahedral discretization of three-dimensional electrically large bodies

**PAN Canlin ZHANG Ming BO Yaming**

(*College of Electronic Science & Engineering*, *Nanjing University of Posts and Telecommunications*, *Nanjing Jiangsu* 210003, *China*)

**Abstract** A fast algorithm for finding the common facets of adjacent tetrahedrons is presented, which can be employed in the moment-method-based solver for the volume integral equation. The algorithm is derived by means of the concepts and principles of adjacency and incidence matrices for graphs, and it can be implemented with the transpose and multiplication operations for sparse matrices, with the computational and storage complexities of $O(N)$. The numerical results verify the effectiveness of the algorithm which needs less arithmetic operations. It is suitable for the pre-processing of solving electromagnetic fields from electrically large dielectric bodies, for a general purpose software tool or an algorithm test platform.

**Key words** the method of moments; volume integral equation; pre-processing; fast algorithm

## 引 言

各个应用领域的工程需求需要求解不同类型的电大尺寸电磁散射与辐射问题[1]. 电磁场快速算法的研究需要能够提供通用与快速的求解方法以满足需求. 以多层快速多极子算法[2-5]、快速傅里叶变换法[6]、H 矩阵(Hierarchical Matrices, H-matrices)[7]与自适应积分方法[8]方法为代表的分

**收稿日期**: 2013-04-24

**资助项目**: 国家自然科学基金资助项目(61071021)

**联系人**: 薄亚明 E-mail: ymbo@njupt.edu.cn

层离散快速算法,需要通用的单元编号换算,以实现通用的分组和分层处理程序.另外,通用求解程序(Solver)也需要能够处理通用的离散工具,并将离散单元信息处理成能够为如矩量法等求解算法所利用的数据.离散单元信息指面离散的面元及其对应的边元与点元,体离散的则为体元及其对应的面元、边元与点元.由于大规模问题的单元多,离散单元处理与分层分组需要不同类型几何单元编号的调整,涉及关联矩阵的改变,也存在计算与存储复杂度问题.在求解算法低复杂度的情况下,若单元处理与分层分组运算处理复杂度较高,则该方面的计算反而成为计算速度的瓶颈.

单元剖分可借助于各种商用或开源的有限元网格生成器,如 ANSYS、Gmsh[9] 等,无需另行开发.但这些网格生成器所生成的网格数据主要用于有限元求解器,只给出了体元对点元(体离散)或面元对点元(面离散)的数据,并不能直接用于电磁场数值求解的 RWG(Rao-Wilton-Glisson)[10] 或 SWG(Schaubert-Wilton-Glisson)基函数[11].对此,需要从离散数据中提取相邻体元的公共面或相邻面元的公共边,以构造 RWG 或 SWG 基函数.

在计算电磁学领域,大量文献侧重于求解算法的研究与改进,特别是多层快速多极子算法的提出和应用[2],使得求解所需存储量和单次迭代的计算量都将为 $O(N\log N)$.此外预条件技术的应用,迭代次数也大为降低,使得求解过程的计算复杂度小于平方阶.然而,有关离散单元处理方面的文献所见不多,缺少系统研究.文献[4]有所论及,但属于描述性的,且未给出通用处理技术.直接查找算法可通过离散单元的两两比较得到,其计算复杂度为 $O(N^2)$,相比于低复杂度的求解算法,则此部分的计算将不可忽略,甚至成为完整求解计算的瓶颈.已报道的详细处理算法[12-13]虽然具备了通用性与线性复杂度的特点,但计算过程稍为复杂,有些数据的内存分配难以确定,需要足够大的估计数,所需存储量与计算量也并未降至最低.

为此,对用四面体单元的体剖分情况,本文梳理了体、面、边和点 4 种离散单元的关联关系,分为结构化与非结构化两类.根据两类关系的不同特点,提出了利用结构化关联关系查找体元公共面的快速算法.所提算法为线性复杂度,所需存储量与计算量明显比文献[12]中的更少,可用于连接通用网格生成器与基于矩量法的快速求解程序,且不会成为复杂度瓶颈.将该算法的思想降一维使用,很容易获得表面离散时三角形单元的公共边快速查找算法.

## 1 算法原理

利用 ANSYS 或者 Gmsh[9] 等网格生成软件对几何体进行四面体网格剖分,可得到两组数据,一组是节点编号及对应的三维坐标,另一组是四面体体元与节点编号的对应关系.由于这些剖分软件通常针对有限元分析,故四面体的公共面和非公共面信息隐含于上述两组数据中,没有显式给出.但基于矩量法与 SWG 基函数的分析算法,需要获得定义 SWG 基函数的公共面,必须通过额外的运算提取公共面与非公共面及其对应的节点号.

四面体单元中基本几何元素为点、线、三角形面元和四面体体元,分别为 0、1、2、3 维元素.由基本几何关系可知,每个四面体有 4 个面,6 条边(线);每个面有 3 条边(线),3 个点等等.即按维数高低,每一高维元素关联的低维元素数目是确定的,称这种确定的关联关系是结构化关联关系.反之,每个点对应的面和四面体的数目是不确定的,即低维元素关联的高维元素的数目是不确定的,称为非结构化关联关系.

根据图论的关联矩阵和邻接矩阵的概念,分别用 $\boldsymbol{I}_{t\rightarrow n}$ 和 $\boldsymbol{I}_{n\rightarrow t}$ 表示体-点和点-体关联矩阵,每一个非零元代表这两个几何元素相关联,其中的高维元素包含低维元素;$\boldsymbol{A}_{t\leftrightarrow t}$ 为体元邻接矩阵,此处定义邻接关系为高维元素通过低一维元素相邻,如体元邻接矩阵 $\boldsymbol{A}_{t\leftrightarrow t}$ 的每一个非零元代表两个四面体单元通过一个三角形相邻,即这两个四面体有公共面.这里只列出本文用到的关联矩阵和邻接矩阵,其余关系可以类似定义,不一一赘述.

显然,关联矩阵和邻接矩阵都是稀疏矩阵,对于结构化的关联矩阵,如体-点关联矩阵 $\boldsymbol{I}_{t\rightarrow n}$ 可以直接用二维数组存储,而邻接矩阵和非结构化的关联矩阵,可采用三元组顺序表行主序压缩存储.

由前述体元邻接矩阵 $\boldsymbol{A}_{t\leftrightarrow t}$ 的定义可知,一旦得到了体元邻接矩阵 $\boldsymbol{A}_{t\leftrightarrow t}$,利用其上三角矩阵或者下三角矩阵,顺次遍历所有体元,就可获得所有的公共面与非公共面对应的节点号等信息.

由于两个不同的四面体之间至多有一个公共面,直接的方法为两两比较法,即两两比较四面体体元,判断是否存在公共面.两重循环遍历之后即可找到所有的公共面.相当于完全生成了体元邻接矩阵 $\boldsymbol{A}_{t\leftrightarrow t}$,一共有 $N^2$ 个元素,其中 $N$ 为体元数目.显然两两比较法的计算复杂度为 $O(N^2)$.

而实际上,每一个四面体元最多有 4 个邻接体元,意味着体元邻接矩阵 $\boldsymbol{A}_{t\leftrightarrow t}$ 每一行最多有 4 个非零元.若只生成这些非零元,也就得到了计算复杂度为线性且计算量最小的快速查找算法.

## 2 快速查找算法与讨论

根据上一小节分析,结合四面体的体、面和点的映射关系,公共面的快速查找算法步骤如下:

### 2.1 获得点-体关联矩阵 $\boldsymbol{I}_{n\to t}$

直接读入由网格生成器剖分得到的四面体元与节点编号的关联关系,即体-点关联矩阵 $\boldsymbol{I}_{t\to n}$,共有 $4N$ 个非零元素,其为结构化对应关系,直接用二维数组存储.由关联矩阵的定义可知,点-体关联矩阵 $\boldsymbol{I}_{n\to t}$ 为体-点关联矩阵 $\boldsymbol{I}_{t\to n}$ 的转置矩阵,表示为

$$\boldsymbol{I}_{n\to t} = \boldsymbol{I}_{t\to n}^{\mathrm{T}}. \tag{1}$$

两个矩阵的非零元素数目相同.点一体关联矩阵 $\boldsymbol{I}_{n\to t}$ 采用三元组顺序表行主序压缩存储,其行列下标分布表示节点和体元编号,其值为 1,表示所涉及的节点和体元相关联.

### 2.2 计算体元邻接矩阵 $\boldsymbol{A}_{t\leftrightarrow t}$

对体-点关联矩阵 $\boldsymbol{I}_{t\to n}$ 和点-体关联矩阵 $\boldsymbol{I}_{n\to t}$ 做乘积,可得到体元相邻矩阵,表示为

$$\boldsymbol{A}'_{t\leftrightarrow t} = \boldsymbol{I}_{t\to n}\boldsymbol{I}_{n\to t}\ , \tag{2}$$

对体元相邻矩阵 $\boldsymbol{A}'_{t\leftrightarrow t}$ 整除 3,并对对角线元素置 0 就可得到体元邻接矩阵 $\boldsymbol{A}_{t\leftrightarrow t}$,

$$\boldsymbol{A}_{t\leftrightarrow t}(i,j) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{A}'_{t\leftrightarrow t}(i,j) = 3, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{3}$$

该矩阵的每一个非零元素表示行列号对应的两个体元相邻接,有一个公共面.体元邻接矩阵 $\boldsymbol{A}_{t\leftrightarrow t}$ 采用三元组顺序表行主序压缩存储,体元相邻矩阵 $\boldsymbol{A}'_{t\leftrightarrow t}$ 作为中间过程,无需存储,且只逐行生成,使用完毕即释放.

### 2.3 查找公共面和非公共面信息

由邻接矩阵的含义可知,可从体元邻接矩阵 $\boldsymbol{A}_{t\leftrightarrow t}$ 某行的非零元素获得某体元的所有邻接单元.于是可根据邻接矩阵 $\boldsymbol{A}_{t\leftrightarrow t}$,从第一个体元开始,找出其所有邻接单元.比较这些邻接体元的共用的节点,可找出并记录其公共面及对应的体元和节点编号.为避免重复比较并减少计算量,可只寻找比当前单元编号大的邻接单元.如此遍历所有单元,即可得到所有公共面.在生成公共面的同时,若某一个体元的公共面数目小于 4 个,表示该体元的 4 个面元之中有非公共面元(本文假设剖分后不存在孤立的四面体元),通过比较体元和公共面的节点编号就可以得到非公共面的节点编号,具体见表 1.

**表 1 四面体的公共面和非公共面关系**

| 四面体节点编号 | 公共面节点编号 | 非公共面节点编号 |
|---|---|---|
| ($n1,n2,n3,n4$) | ($n1,n2,n3$) | ($n1,n2,n4$)<br>($n1,n3,n4$)<br>($n2,n3,n4$) |
| | ($n1,n2,n3$)<br>($n1,n2,n4$) | ($n1,n3,n4$)<br>($n2,n3,n4$) |
| | ($n1,n2,n3$)<br>($n1,n2,n4$)<br>($n1,n3,n4$) | ($n2,n3,n4$) |

显然体元邻接矩阵 $\boldsymbol{A}_{t\leftrightarrow t}$ 非零元素的数目的一半为公共面元的数目,进一步由几何关系可知,体元邻接矩阵 $\boldsymbol{A}_{t\leftrightarrow t}$非零元素数目 $N_{\mathrm{t}}$、公共面数目 $N_{\mathrm{cf}}$ 和非公共面数目 $N_{\mathrm{nf}}$ 有以下关系:

$$4N_{\mathrm{t}} = 2N_{\mathrm{cf}} + N_{\mathrm{nf}} \tag{4}$$

因此可以预先求得公共面元和非公共面元数目,精确分配内存空间.

由前面的算法步骤可知,主要操作为稀疏矩阵的转置和乘法运算.

稀疏矩阵转置所得矩阵和原矩阵的非零元素数目相同,因此,转置所得矩阵的规模是确定的,不需要额外的内存空间,其计算量和存储量都为 $O(N)$.

由于两个稀疏矩阵相乘的乘积不一定是稀疏矩阵,因此该乘法运算的计算量并不一定为 $O(N)$.但在本算法中,体-点关联矩阵 $\boldsymbol{I}_{t\to n}$ 和点-体关联矩阵 $\boldsymbol{I}_{n\to t}$ 都是稀疏矩阵,所得结果体元相邻矩阵 $\boldsymbol{A}'_{t\leftrightarrow t}$ 仍然为稀疏矩阵,其每一行的非零元素数目就是对应编号体元的相邻体元数目.令 $m_i$ 为第 $i$ 个体元相邻的体元数目,则存在

$$M = \max(m_1, m_2, m_3, \cdots, m_N)\ . \tag{5}$$

式中 $N$ 为体元数目.由几何知识和网格剖分数据可知 $M$ 的大小由物体形状和网格剖分生成器共同决定,与 $N$ 无关.因此,本算法中稀疏矩阵的乘法运算的计算复杂度和存储量都为 $O(N)$,且其总计算量需受到 $M$ 的影响,对于不同物体 $M$ 和总计算量稍有差异,这点可以在后面的算例 2 中得到印证.

综上可知,本算法的计算复杂度和存储量都为 $O(N)$.相比现有快速算法[12],本算法只需一次遍历就可以得到公共面和非公共面的信息,且所需存储空间都预先精确计算得到并分配,无需额外内存空间.其基本思路也适用于几何体表面剖分的公共边查找,进一步可推广到几何体体剖分如六面体剖分的公共面查找.

## 3　数值算例

为了验证以上算法及分析的正确性和有效性，给出两个算例. 所有计算都在个人台式计算机上完成，所配置中央处理器(Central Processing Unit，CPU)为 Intel(R) core(TM)2 Duo E4500(2.2 GHz).

算例 1 参照文献[12]，将一个长方体先分别在三个垂边上等分，即分成许多小立方体，再进一步剖分成 6 个四面体. 图 1 给出了一个小立方体剖分的示意图，6 个四面体分别为：$t_1$(1,2,3,6)，$t_2$(1,5,6,7)，$t_3$(1,3,6,7)，$t_4$(2,3,4,8)，$t_5$(2,3,6,8)和 $t_6$(3,6,7,8)，括号内数字对应立方体的节点编号. 参照文献[12]，计算了等分段数从 4 到 128 段的情形，计算所需 CPU 时间见表 2 和图 2，其余结果与文献[12]相符合.

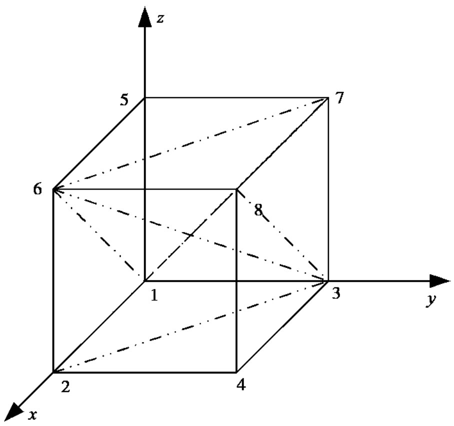



图 1　小立方体及其四面体剖分示意图

表 2　公共面查找计算结果比较　单位：s

| 四面体数目 | 本文所提算法 | 文献[12]算法 | 直接查找算法 |
|---|---|---|---|
| 3 072 | 0.015 6 | 0.109 38 | 0.781 |
| 6 144 | 0.031 25 | 0.218 75 | 3.094 |
| 12 288 | 0.046 88 | 0.453 13 | 12.250 |
| 24 576 | 0.078 13 | 0.906 25 | 49.109 |
| 49 152 | 0.140 63 | 1.781 25 | 196.750 |
| 98 304 | 0.328 13 | 3.625 | 789.875 |
| 196 608 | 0.609 38 | 7.359 38 | 3 154.328 |
| 393 216 | 1.265 63 | 14.703 12 | 12 625.734 |

在表 2 中比较了本文所提算法与文献[12]算法和直接查找算法的计算结果. 从表中可以看出，前两种方法求解所需 CPU 时间随着四面体数目的增加线性增长，即计算复杂度为线性阶，与前述分析吻合；而第三种直接查找算法所需 CPU 时间随着四面体数目的增加平方增长，其计算复杂度为 $O(N^2)$. 当四面体的数目较少时，三种方法都可以比较快地得到结果. 但是随着求解物体的点尺寸增大，四面体数目急剧增加，三种方法之间的差距也越来越大. 对于几万或者几十万数目的四面体问题，本文所提算法所需时间最少，较文献[12]算法有了明显的减少，而直接查找算法的计算所需时间不再是可以忽略的.

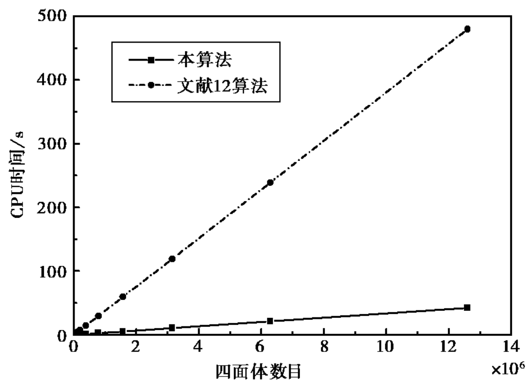



图 2　立方体剖分公共面查找计算结果

在图 2 中给出了两种快速算法的比较，直观地显示着两种算法所需 CPU 时间的差别，较文献[12]算法有了明显的改进，适用于大规模电磁场问题分析的前处理.

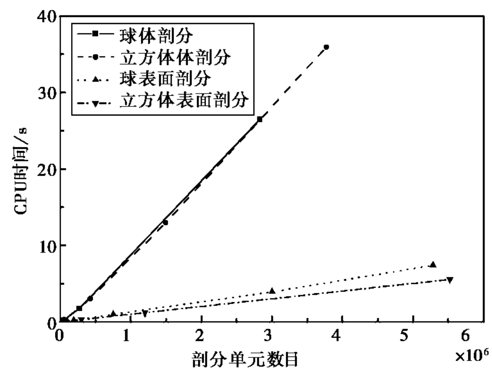



图 3　公共边和公共面查找计算结果

本算法可通过简单修改，就可用于三角形表面剖分的公共边查找. 算例 2 计算了不同尺寸立方体和球体，分别由 Gmsh 进行三角形表面剖分和四面体体剖分，比较了三角形剖分公共边查找和四面体剖分的公共面查找的计算结果，如图 3 所示. 从图中可以看出，表面剖分的公共边查找所需的 CPU 时

间要明显少于体剖分的公共面查找所需的 CPU 时间. 这是由于对于三角形表面剖分和四面体体剖分，每一个三角形的邻近三角形数目明显小于每一个四面体的邻近四面体数目，同时对于式(5)有 $M_{三角形} \ll M_{四面体}$，所得结果与前面分析吻合.

## 4 结 论

针对矩量法采用 SWG 基函数求解体积分方程遇到的公共面查找问题，提出了一种通用的线性阶计算复杂度的公共面快速查找算法. 该算法借助于图论中邻接矩阵和关联矩阵的概念，利用离散单元间的结构化关联关系，实现了单次遍历的公共面查找算法，其计算与存储复杂度都为 $O(N)$，且可精确分配内存空间. 数值算例结果验证了分析的正确性与效率，计算时间较现有查找算法有较大幅度的降低. 本算法适用于大型任意形状电磁场问题分析的前处理，其基本思想也容易推广到面剖分的公共边快速查找，以及其它种类的单元剖分的情形，如六面体与四边形剖分.

**参考文献**


[1] HARRINGTON R F. Field Computation by Moment Methods[M]. New York: Macmillan, 1968.

[2] CHEW W C, JIN J M, MICHIELSSEN E, et al. Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics[M]. New York: Artech House, 2001.

[3] 胡 俊，聂在平，王 军，等. 三维电大目标散射求解的多层快速多极子方法[J]. 电波科学学报，2004，19(5)：509-514.
HU Jun, NIE Zaiping, WANG Jun, et al. Multilevel fast multipole algorithm for solving scattering from 3-D electrically large object[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2004, 19(5): 509-514. (in Chinese)

[4] GIBSON W C. The Method of Moments in Electromagnetics[M]. New York: Chapman and Hall/CRC (Taylor & Francis Group) 2008.

[5] 弓晓东，胡 俊，聂在平，等. 三维导电目标电磁散射的高阶多层快速多极子方法[J]. 电波科学学报，2004，19(5)：577-580.
GONG Xiaodong, HU Jun, NIE Zaiping, et al. Higher order multilevel fast multipole algorithm for solving electromagnetic scattering from 3-D perfectly electric conductor[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2004, 19(5): 577-580. (in Chinese)

[6] 朱秀芹，耿友林，吴信宝. 三维各向异性介质目标电磁散射的 MOM-CGM-FFT 方法[J]. 电波科学学报，2002，17(3)：209-215.
ZHU Xiuqin, GENG Youlin, WU Xinbao. Application of MOM-CGM-FFT method to scattering from three-dimensional anisotropic scatterers[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2002, 17(3): 209-215. (in Chinese)

[7] HACKBUSCH W. A sparse matrix arithmetic based on H-matrices, Part I: Introduction to H-matrices[J]. Computing, 1999, 62(2): 89-108.

[8] 胡 俊，王晓峰，聂在平，等. 三维目标电磁散射的自适应积分方法[J]. 电波科学学报，2007，22(4)：614-618.
HU Jun, WANG Xiaofeng, NIE Zaiping, et al. Analysis of 3D electromagnetic scattering using adaptive integral method[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2007, 22(4): 614-618. (in Chinese)

[9] GEUZAINE C and REMECLE J F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, 79(11): 1309-1331.

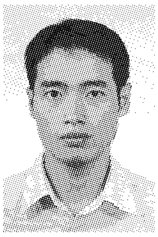
[10] RAO S M, WILTON D R, GLISSON A W. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape[J]. IEEE Trans on AP, 1982, 30(3): 409-418.

[11] SCHAUBERT D H, WILTON D R, GLISSON A W. A tetrahedral modeling method for electromagnetic scattering by arbitrarily shaped inhomogeneous dielectric bodies[J]. IEEE Trans on AP, 1984, 32(1): 77-85.

[12] 张 明，郭 琳. 矩量法解体积分方程前处理的快速算法[J]. 南京邮电大学学报，2012，32(6)：21-23.
ZHANG Ming, GUO Lin. A fast algorithm for pre-processing of solving volume integral equation using method of moments[J]. Journal of Nanjing University of Posts and Telecommunication: Natural Science, 2012, 32(6): 21-23. (in Chinese)

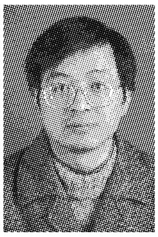
[13] 张 明，郭 琳. 一种矩量法前处理的快速算法[J]. 南京邮电大学学报，2010，30(5)：8-10.
ZHANG Ming, GUO Lin. A fast algorithm for pre-procedure of method of moments[J]. Journal of Nanjing University of Posts and Telecommunication Natural Science, 2010, 30(5): 8-10. (in Chinese)

**作者简介**



**潘灿林** (1982—),男,浙江人,南京邮电大学电子科学与工程学院博士研究生,主要研究方向为计算电磁学.

**张 明** (1962—),男,江苏人,南京邮电大学电子科学与工程学院教授,主要研究方向为数值电磁学、电磁兼容和干扰等.



**薄亚明** (1963—),男,上海人,南京邮电大学电子科学与工程学院教授,主要研究方向为工程电磁场理论、电磁场问题数值解法和天线技术等.

(上接第 304 页)

**作者简介**

**徐 璟** (1986—),男,江苏人,空军预警学院在读博士研究生,主要研究方向为电子对抗信息处理.

**何明浩** (1963—),男,江苏人,空军预警学院教授、博士生导师,主要研究方向为电子对抗信息处理、电磁场与微波技术和雷达系统工程.

**陈昌孝** (1982—),男,安徽人,空军预警学院在读博士研究生,主要研究方向为电子对抗信息处理.

**王 欢** (1985—),男,湖北人,空军预警学院助教,主要研究方向为电子对抗信息处理.